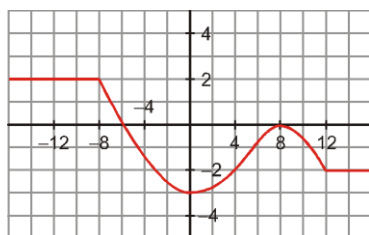


NOMBRE: _____ N°: _____

1. Observa la gráfica de la función (EMPIEZA Y ACABA EN DONDE SE VE) y responde:



- ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?
- ¿Cuál es el dominio de definición? ¿Y el recorrido?
- Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos.
- Halla la TVM de la función en el intervalo $[0, 4]$

a) Eje X: $(-6, 0)$; $(8, 0)$ Eje Y: $(0, -3)$

b) Dom f: $[-16, 16]$ Recorrido ó Im f: $[-3, 2]$

c) Crece en $(0, 8)$; Decrece en $(-8, 0)$ U $(8, 12)$; Es constante en los demás puntos.

d) TVM $[0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-2 - (-3)}{4} = \frac{1}{4}$

2. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-5}{2x^2-6x}$

b) $y = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$

a) Buscamos los puntos donde se anula el denominador para sacarlos del dominio, pues en esos puntos no existe la función (en la calculadora daría error).

$$2x^2 - 6x = 0 ; \quad x(2x - 6) = 0 ; \quad \begin{cases} x=0 \\ 2x - 6 = 0 ; x=3 \end{cases}$$

Dom f = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) Para que la raíz exista tiene que ocurrir que el radicando sea ≥ 0

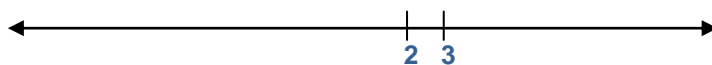
Resolvemos la inecuación de 2º grado $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$

Para ello resolvemos primero la ecuación de 2º grado asociada: $-x^2 + 5x - 6 = 0$

OJO! PARA RESOLVER LA ECUACIÓN SE LE PUEDE CAMBIAR EL SIGNO A TODO, PERO DESPUÉS DEBEMOS VOLVER A LA EXPRESIÓN INICIAL PARA RESOLVER LA INECUACIÓN.

$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Ahora situamos estos dos valores en la recta numérica, lo que nos origina 3 intervalos en los que hay que ver si se cumple la inecuación $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$



Ahora podemos proceder de estas dos formas:

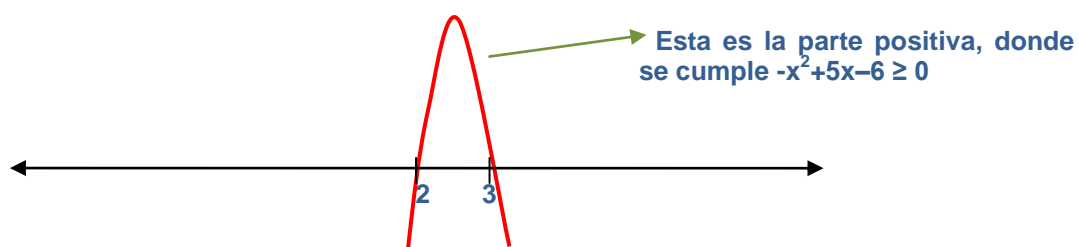
1ª) Tomar un valor en cada intervalo formado, $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$ y sustituir en $-x^2 + 5x - 6$.

Si el resultado es ≥ 0 como indica la inecuación, entonces ese intervalo formará parte del dominio, pues el radicando de la raíz será positivo y por tanto existirá dicha raíz.

Por ejemplo $f(0) = -6 < 0$
 $f(2.5) = f(5/2) \geq 0$
 $f(4) < 0$

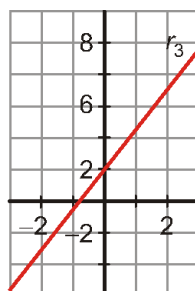
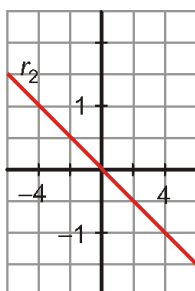
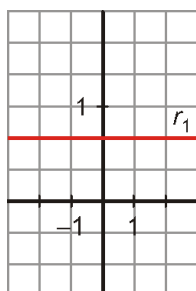
Por tanto la solución es **Dom $f = [2,3]$**

2ª) Esta forma de solucionar es más rápida, y solo se reduce a pensar en la gráfica de la función del radicando $-x^2 + 5x - 6$ (es una parábola invertida) y ver cuándo es positiva o cero, es decir, cuando va por encima del eje X. Si consideramos la recta real como el eje X:



Por tanto la solución es **Dom $f = [2,3]$**

3. Observando las gráficas, indica cuál es la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes rectas y halla la ecuación de cada una de ellas:



r_1 : Función constante. Ecuación **$y = 2/3$** ; Pendiente $m=0$; Ordenada en el origen $n= 2/3$

r_2 : Función de proporcionalidad con pendiente negativa. Ecuación **$y = -1/4 x$** ; $m= -1/4$; $n=0$

r_3 : Función lineal. $y= mx + n \rightarrow$ **$y = 2x + 2$**

$n=2$ pues es el punto de corte con el eje Y. $\rightarrow y = mx + 2$

Hallemos la pendiente. $m = 2/1$ (suponiendo que pase por el $(-1,0)$)

4. Representa la siguiente función:(1,5 PUNTOS)

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ x^2 + 3x & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Representamos la parábola $y= x^2 + 3x$ entre los valores $x= -3$ y $x= 1$.

Hallamos el vértice: $x_v = -b/2a = -3/2 \rightarrow y_v = (-3/2)^2 + 3 \cdot (-3/2) = 9/4 - 9/2 = -9/4 \rightarrow$ **$V (-3/2, -9/4)$**

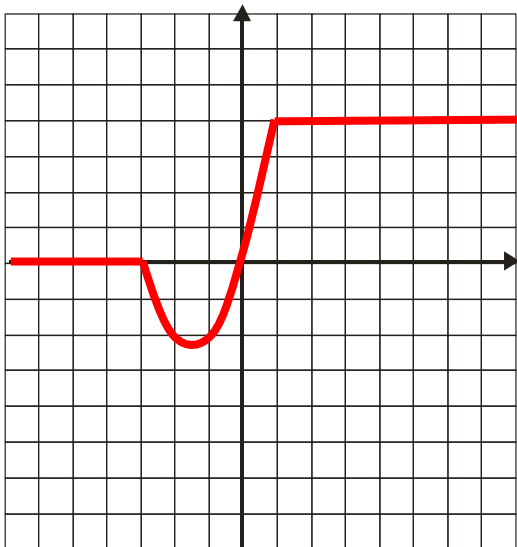
Hacemos una tabla de valores con puntos cercanos al vértice y simétricos a él. También le damos los valores $x= -3$ y $x= 1$ para saber dónde empieza y acaba la parábola.

NOMBRE: _____ N°: _____

x	y
-3/2	-9/4
-1	-2
-2	-2
0	0
-3	0
1	4

Como ya tenemos los puntos de corte con los ejes no tenemos que hallarlos.

Las rectas de ecuaciones $y=0$ e $y=4$ son constantes, y por lo tanto horizontales.



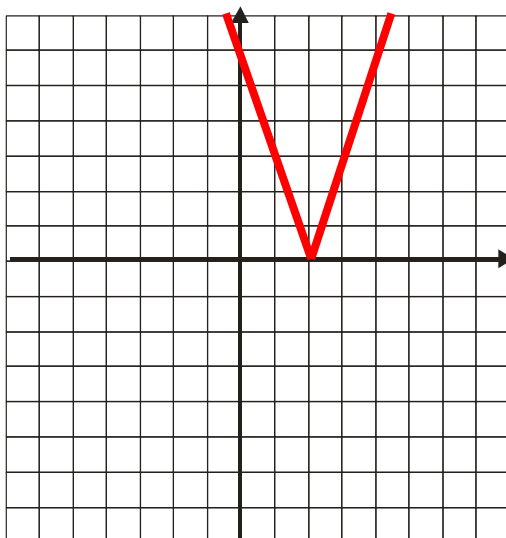
5. Representa la siguiente función, expresándola previamente como una función a trozos:

$$y = |3x - 6|$$

$$y = |3x - 6| = \begin{cases} 3x - 6 & \text{si } 3x - 6 \geq 0 \\ -3x + 6 & \text{si } 3x - 6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -3x + 6 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Para hallar los valores de x que cumplen cada tramo de la función resolvemos la inecuación de primer grado $3x - 6 \geq 0$. Para ello despejamos x como si de una ecuación se tratara, teniendo cuidado de cambiar el sentido de la desigualdad si multiplicamos por un número negativo. En este caso no se da esa circunstancia.

x	y
2	0
3	3
0	6



6. Representa las siguientes funciones, indicando sus características principales: (1,5 PUNTOS)

a) $y = -\sqrt{x+5}$

b) $y = -2 + \frac{1}{x}$

c) $y = \log_5 x$

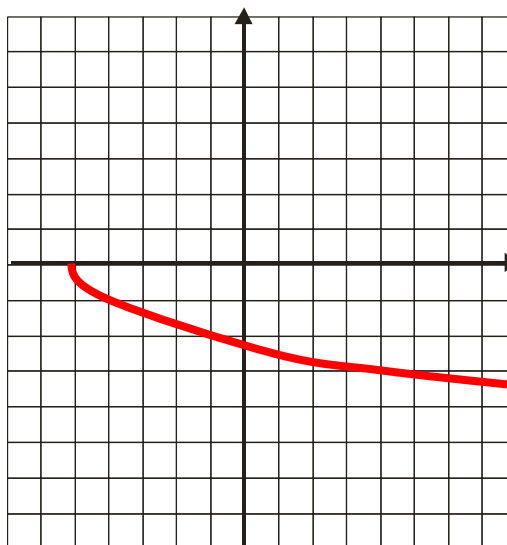
a) $y = -\sqrt{x+5}$

x	y
-5	0
-4	-1
-1	-2
0	$-\sqrt{5}$
4	-3
11	-4

Función radical

- Su dominio está formado por los valores de x que hacen el radicando positivo o nulo, es decir, hay que resolver la inecuación $x+5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5 \rightarrow \text{Dom } f = [-5, +\infty)$

- Es continua en todo su dominio.
- Es decreciente.



b) $y = -2 + \frac{1}{x}$

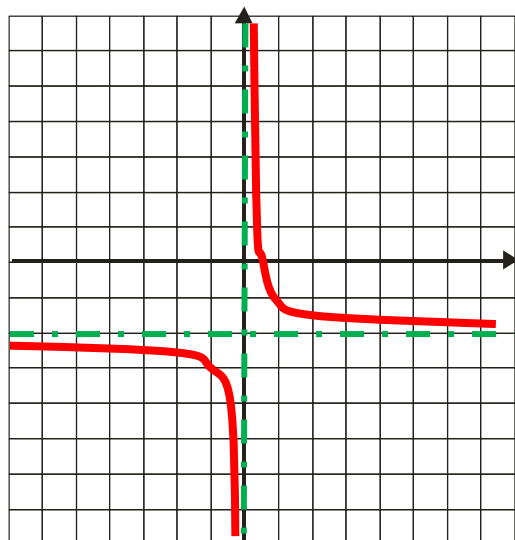
x	y
1	-1
-1	-3
1/2	0
-1/2	-4
2	-3/2
-2	-5/2

Función de proporcionalidad inversa

- Su dominio está formado por los valores de x que no anulan el denominador. Para hallarlo igualamos el denominador a cero, y sacamos del dominio los valores que resuelvan la ecuación:

$x = 0 \rightarrow$ En este caso es inmediato $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Es decreciente
- Continua salvo en $x=0$
- Asíntota horizontal $y = -2$
- Asíntota vertical $x = 0$



NOMBRE: _____ N°: _____

c) $y = \log_5 x$

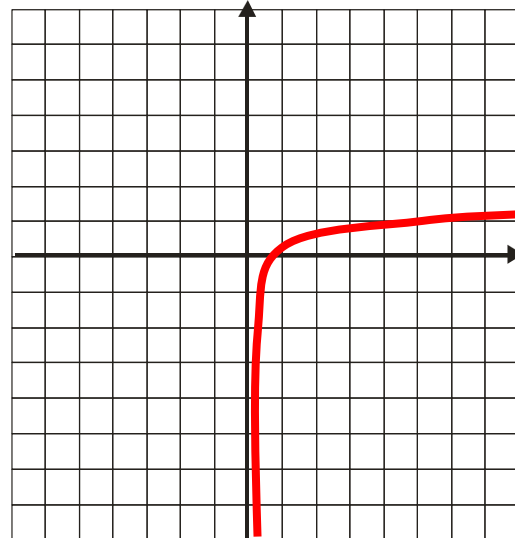
x	y
1	0
5	1
25	2
1/5	-1
1/25	-2

$y = 5^x$

x	y
0	1
1	5
2	25
-1	1/5
-2	1/25

Función logarítmica de base 5

- Es la inversa de la función exponencial $y = 5^x$
- Solo hay logaritmo de números positivos $\rightarrow \text{Dom } f = (0, +\infty)$
- Creciente
- Continua
- Asíntota vertical $x = 0$



7. Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad de 30 m/s. La altura, h , que alcanza en cada instante t viene dada por $h(t) = 30t - 5t^2$.

- Haz la representación gráfica de $h(t)$.
- Indica el dominio de definición.
- ¿En qué instantes tiene una altura superior a 25 m?
- ¿Cuál es la máxima altura que alcanza la pelota? e) ¿En qué momento se alcanza?

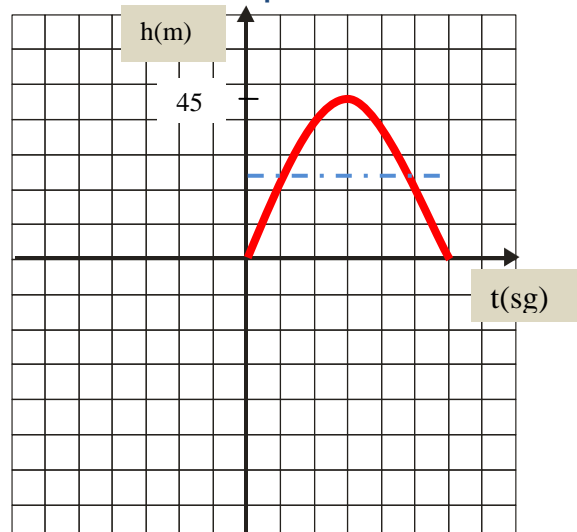
a) $h(t) = 30t - 5t^2$

Es una función cuadrática, por lo tanto su representación gráfica es una parábola. Hay que tener cuidado porque está "desordenada". Si la ordenamos sería $h(t) = -5t^2 + 30t$
Como la función representa la altura, solo representaremos la parte positiva de la gráfica.

Calculamos el vértice $x_v = -b/2a = -30/-10 = 3$

x	y
3	45
2	40
1	25
0	0
4	40
5	25
6	0

Ya tenemos en la tabla los puntos de corte con los ejes.



- b) El dominio de la función para este caso concreto en el que representamos la altura que alcanza la pelota, sería el intervalo $[0,6]$

Si pensáramos en la función desde el punto de vista matemático, sin considerar el caso real, su dominio sería el conjunto \mathbb{R} de todos los números reales.

- c) Se puede ver de dos formas:

1ª- Si miramos la gráfica vemos que desde $x=1$ hasta $x=5$ la gráfica de la función va por encima de la línea horizontal que marca los 25 m de altura.

Por tanto **la respuesta sería entre los segundos 1 y 5.**

2ª- De forma analítica, y por tanto más precisa, habría que resolver la inecuación de segundo grado $-5t^2 + 30t \geq 25$, o lo que es lo mismo la inecuación $-5t^2 + 30t - 25 \geq 0$

Para ello resolvemos primero la ecuación $-5t^2 + 30t - 25 = 0$

Podemos cambiarle el signo pero hay que tener en cuenta que luego debemos usar la expresión original $-5t^2 + 30t - 25$.

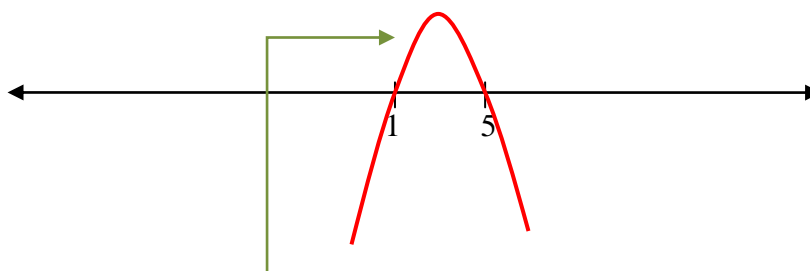
$$5t^2 - 30t + 25 = 0 \rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=5 \end{cases}$$

Se forman tres intervalos en la recta real, y tomamos valores en cada uno de ellos o estudiamos según la forma de la función cuándo se cumple la inecuación $-5t^2 + 30t - 25 \geq 0$.

Si le damos valores, por ejemplo 0, 2, 6 y los sustituimos en la expresión $-5t^2 + 30t - 25$ vemos que ocurre:

- Para $t=0 \rightarrow -25 < 0$
- Para $t=2 \rightarrow 15 \geq 0$
- Para $t=6 \rightarrow -25 < 0$

Si observamos la gráfica, como $a = -5 < 0$ la gráfica correspondiente sería una parábola invertida:



Se cumple que es ≥ 0 cuando va por encima del eje X que representa la recta real, es decir, entre 1 y 5.

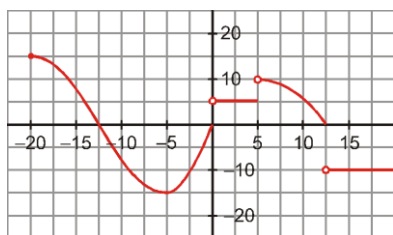
Por tanto **la respuesta sería entre los segundos 1 y 5.**

- d) El máximo o el mínimo en una parábola coincide con el vértice, como fácilmente se ve en la gráfica.

La respuesta es que la altura máxima es de 45 m a los 3 segundos.

NOMBRE: _____ N°: _____

1. Dada la función mediante su representación gráfica, responde a las siguientes preguntas:



- ¿Cuál es el dominio de definición? ¿Y su recorrido?
- ¿Es continua? Si no lo es, indica dónde es discontinua.
- Indica los puntos de corte con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Halla la TVM de la función en el intervalo $[-5, 0]$

a) Dom f : $[-20, 20]$ Recorrido o Im f : $[-15, 15]$

b) Es continua salvo en los puntos $x = 0$; $x = 5$; $x = 12,5$

c) Eje X: $(-12,5,0)$; $(0,0)$; $(5,0)$ Eje Y: $(0,0)$

Crece en $(-5,0)$; Decrece en $(-20,-5)$ U $(5,12,5)$; Es constante en los demás puntos.

d) TVM $[-5,0] = \frac{f(0)-f(-5)}{0-(-5)} = \frac{0-(-15)}{5} = \frac{15}{5} = 3$

2. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{2x-3}{3x^2-12}$

b) $y = \sqrt{-x^2 - 6x - 8}$

- a) Buscamos los puntos donde se anula el denominador para sacarlos del dominio, pues en esos puntos no existe la función (en la calculadora daría error).

$$3x^2 - 12 = 0 ; \quad 3x^2 = 12; \quad x^2 = 4 ; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-2,2\}$

- b) Para que la raíz exista tiene que ocurrir que el radicando sea ≥ 0

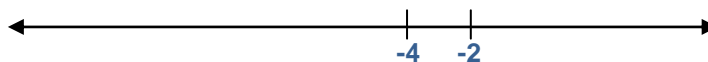
Resolvemos la inecuación de 2º grado $-x^2 - 6x - 8 \geq 0$

Para ello resolvemos primero la ecuación de 2º grado asociada: $-x^2 - 6x - 8 = 0$

OJO! PARA RESOLVER LA ECUACIÓN SE LE PUEDE CAMBIAR EL SIGNO A TODO, PERO DESPUÉS DEBEMOS VOLVER A LA EXPRESIÓN INICIAL PARA RESOLVER LA INECUACIÓN.

$$-x^2 - 6x - 8 = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Ahora situamos estos dos valores en la recta numérica, lo que nos origina 3 intervalos en los que hay que ver si se cumple la inecuación $-x^2 - 6x - 8 \geq 0$



Ahora podemos proceder de estas dos formas:

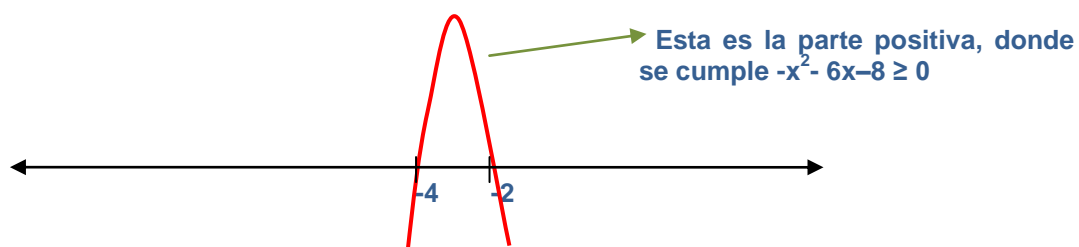
1ª) Tomar un valor en cada intervalo formado, $(-\infty, -4)$, $(-4, -2)$, $(-2, +\infty)$ y sustituir en $-x^2 - 6x - 8$

Si el resultado es ≥ 0 como indica la inecuación, entonces ese intervalo formará parte del dominio, pues el radicando de la raíz será positivo y por tanto existirá dicha raíz.

Por ejemplo $f(-5) < 0$
 $f(-3) \geq 0$
 $f(0) = -8 < 0$

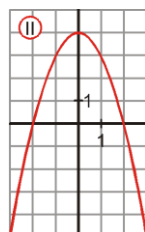
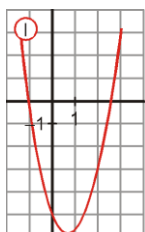
Por tanto la solución es **Dom f = [-4, -2]**

2ª) Esta forma de solucionar es más rápida, y solo se reduce a pensar en la gráfica de la función del radicando $-x^2 - 6x - 8$ (es una parábola invertida) y ver cuándo es positiva o cero, es decir, cuando va por encima del eje X. Si consideramos la recta real como el eje X:



Por tanto la solución es **Dom f = [-4, -2]**

3. Completa las expresiones de estas parábolas (TEN EN CUENTA VÉRTICE, PUNTOS DE CORTE...):



I $\rightarrow y = 2x^2 + \square x + \square$

II $\rightarrow y = \square x^2 + \square$

I. Pasa por (0,-5), por tanto **c = -5** $\rightarrow y = 2x^2 + bx - 5$

Vamos a utilizar que pasa también por (-1,0): $0 = 2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 5 \rightarrow 0 = 2 - b - 5 \rightarrow$ **b = -3**

$y = 2x^2 - 3x - 5$

II. Pasa por (0,4), por tanto **c = 4** $\rightarrow y = ax^2 + 4$

Vamos a utilizar que pasa también por (2,0): $0 = a \cdot 2^2 + 4 \rightarrow$ **a = -1**

$y = -x^2 + 4$

NOMBRE: _____ N°: _____

4. Representa la siguiente función: (1,5 PUNTOS)

$$y = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Representamos la parábola $y = x^2 - 1$ entre los valores $x = -1$ y $x = 2$.

Hallamos el vértice: $x_v = -b/2a = 0 \rightarrow y_v = -1 \rightarrow$ V (0, -1)

Hacemos una tabla de valores con puntos cercanos al vértice y simétricos a él. También le damos los valores $x = -1$ y $x = 2$ para saber dónde empieza y acaba la parábola.

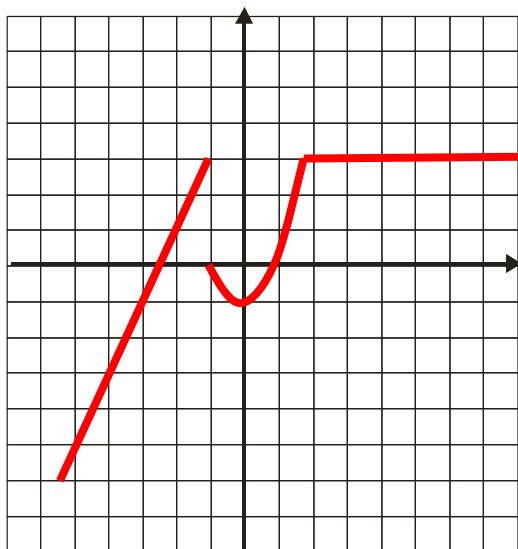
x	y
0	-1
1	0
-1	0
2	3

Como ya tenemos los puntos de corte con los ejes no tenemos que hallarlos.

Vamos a representar la recta $y = 2x + 5$ para valores menores que -1 . Le daremos el valor -1 para ver dónde acabaría.

x	y
-3	-1
-2	1
-1	3

La recta de ecuación $y=3$ es constante, y por lo tanto horizontal.



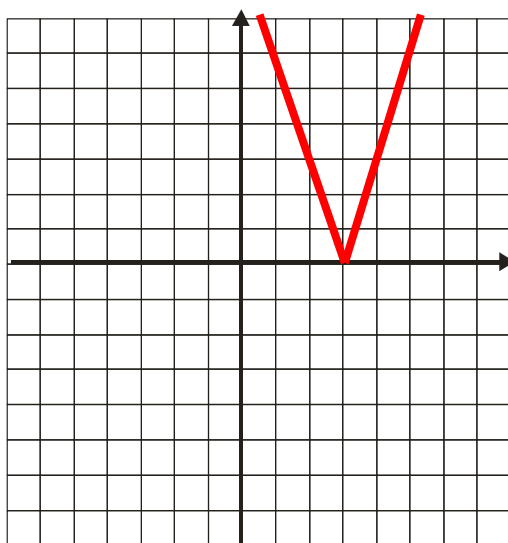
5. Representa la siguiente función, expresándola previamente como una función a trozos:

$$y = |-3x - 9|$$

$$y = |-3x + 9| = \begin{cases} -3x + 9 & \text{si } -3x + 9 \geq 0 \\ 3x - 9 & \text{si } -3x + 9 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -3x + 9 & \text{si } x < 3 \\ 3x - 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Para hallar los valores de x que cumplen cada tramo de la función **resolvemos la inecuación de primer grado** $-3x + 9 \geq 0$. Para ello despejamos x como si de una ecuación se tratara, teniendo cuidado de cambiar el sentido de la desigualdad si multiplicamos por un número negativo. En este caso se da esa circunstancia:

$$-3x \geq -9 \rightarrow 3x \leq 9 \rightarrow x \leq 3$$



x	y
3	0
4	3
2	3

6. Representa las siguientes funciones, indicando sus características principales: (1,5 PUNTOS)

a) $y = \sqrt{-x+3}$

b) $y = -\frac{2}{x} + 2$

c) $y = \log_3 x$

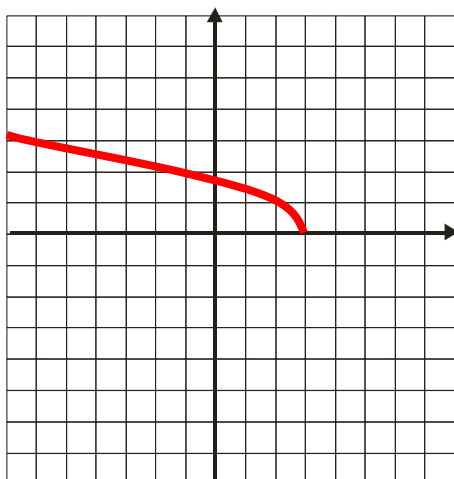
a) $y = \sqrt{-x+3}$

x	y
3	0
2	1
0	$\sqrt{3}$
-1	2
-6	3
-13	4

Función radical

- Su **dominio** está formado por los valores de x que hacen el radicando positivo o nulo, es decir, hay que resolver la inecuación $-x+3 \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 3]$

- Es continua en todo su dominio.
- Es decreciente.



NOMBRE: _____ N°: _____

b) $y = \frac{-2}{x} + 2$

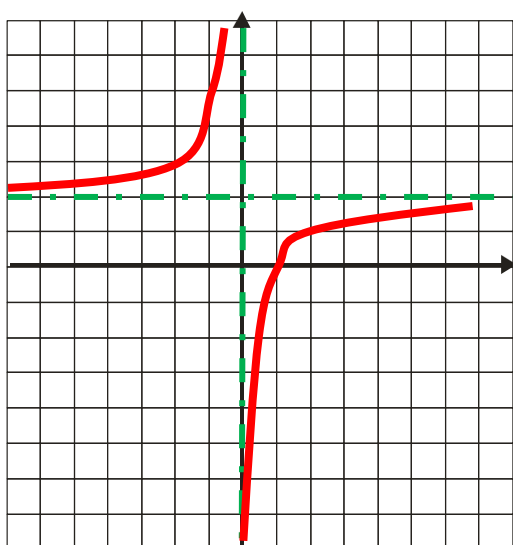
x	y
1	0
-1	4
1/2	-2
-1/2	6
2	1
-2	3

Función de proporcionalidad inversa

- Su dominio está formado por los valores de x que no anulan el denominador. Para hallarlo igualamos el denominador a cero, y sacamos del dominio los valores que resuelvan la ecuación:

$x = 0 \rightarrow$ En este caso es inmediato $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Es creciente
- Continua salvo en $x=0$
- Asíntota horizontal $y = 2$
- Asíntota vertical $x = 0$



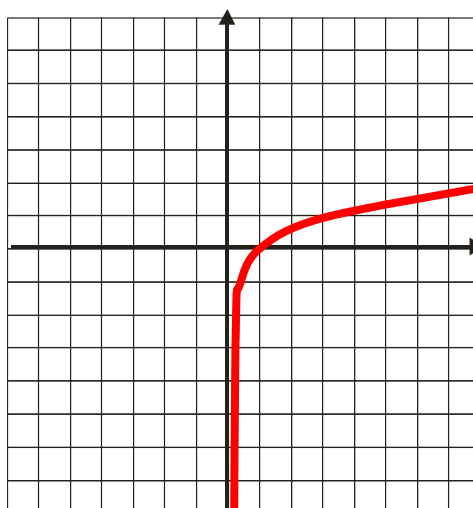
c) $y = \log_3 x$ $y = 3^x$

x	y
1	0
3	1
9	2
1/3	-1
1/9	-2

x	y
0	1
1	3
2	9
-1	1/3
-2	1/9

Función logarítmica de base 3

- Es la inversa de la función exponencial $y = 3^x$
- Solo hay logaritmo de números positivos $\rightarrow \text{Dom } f = (0, +\infty)$
- Creciente
- Continua
- Asíntota vertical $x = 0$



7. Los datos obtenidos del estudio de una población se ajustan a la función:

$$y = 2600 \cdot (0,25)^{\frac{x}{2}} \text{ siendo } x \text{ el número de años transcurridos.}$$

a) Indica cómo varía la población al cabo de 2 años.

b) ¿Cuántos individuos habrá dentro de 4 años?

c) ¿Al cabo de cuánto tiempo la población se habrá reducido a la mitad?

a) $y = 2600 \cdot (0,25)^{x/2}$

En el momento actual $x = 0 \rightarrow y = 2600 \cdot (0,25)^{0/2} = 2600$ habitantes.

Dentro de 2 años $x = 2 \rightarrow y = 650$ habitantes.

Por tanto en 2 años se pasó de 2600 a 650 habitantes.

b) $x = 4 \rightarrow y = 162,5 \approx 163$ habitantes.

c) Aunque se puede hacer tanteando, lo vamos a hacer de forma más precisa:

La población tiene que reducirse a 1300 habitantes. Por tanto tiene que ser $y = 1300$ para averiguar el valor de x correspondiente.

d) $1300 = 2600 \cdot (0,25)^{x/2} \rightarrow \frac{1300}{2600} = (0,25)^{x/2} \rightarrow 0,5 = (0,25)^{x/2} \rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} \rightarrow$

$$2^{-1} = (2^{-2})^{x/2} \rightarrow 2^{-1} = 2^{-x} \rightarrow -1 = -x \rightarrow x = 1$$

resolviendo la ecuación exponencial

Al cabo de 1 año se reducirá a la mitad.

También se puede hacer tomando logaritmos para despejar el exponente:

$$0,5 = (0,25)^{x/2} \rightarrow \log 0,5 = \log (0,25)^{x/2} \rightarrow \log 0,5 = \frac{x}{2} \log 0,25 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\log 0,5}{\log 0,25} \rightarrow$$

$$x = 2 \cdot \frac{\log 0,5}{\log 0,25} \rightarrow x = 1$$

También se puede hacer tomando logaritmos de base 2 en $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$:

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} \rightarrow 2^{-1} = (2^{-2})^{x/2} \rightarrow 2^{-1} = 2^{-x} \rightarrow -1 = -x \rightarrow x = 1$$

usando la definición de logaritmo